Chapitre 16. Analyse asymptotique

Cadre : Dans tout le chapitre, on regardera des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et un point $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$ en lequel il est pertinent de s'intéresser à la limite de f. En pratique, I sera un intervalle (et a un point ou une extrémité de I) ou I sera $\mathbb{N}$ (et $a = +\infty$) dans le cas des suites.

1 Équivalence

1.1 Définitions

Définition 1.1. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$. On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a et on note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$ s'il existe un voisinage V de a dans I et $\mu : V \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in V,\ g(x) = \mu(x)f(x) \\ \mu(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1 \end{cases}$$

En pratique, on sera dans l'un des 2 cas suivants :

* f et g ne s'annulent pas au voisinage de a
* $f(a) = g(a) = 0$ et il existe un voisinage de a tel que f et g ne s'annulent pas sur $V \setminus \{a\}$
  (On dit que a est un zéro isolé de f et g).
  Dans ce cas, la définition devient simplement :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff \frac{g(x)}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$$

Avertissement : En particulier : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$ signifie que f est nulle au voisinage de a.
C'est une assertion que l'on lit souvent après des erreurs de calculs.

Proposition 1.2. $\sim$ est une relation d'équivalence : Soit $f, g, h : I \to \mathbb{R}$

* Réflexivité : On a $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$
* Symétrie : Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $g \underset{a}{\sim} f$
* Transitivité : Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{\sim} h$

1.2 Propriétés multiplicatives

Proposition 1.3. Soit $f_1, f_2, g_1, g_2 : I \to \mathbb{R}$ tels que : $\begin{cases} g_1(x) \underset{x\to a}{\sim} f_1(x) \\ g_2(x) \underset{x\to a}{\sim} f_2(x) \end{cases}$

* Alors $g_1 g_2(x) \underset{x\to a}{\sim} f_1 f_2(x)$
* Si g_1 et g_2 ne sont pas nulles au voisinage de a, $\frac{g_1(x)}{g_2(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$
* On peut élever un équivalent à une puissance (constante).
  Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $f_1(x)^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)^\alpha$ (à conditions que ces fonctions soient définis au voisinage de a).

1.3 Propriétés de l'équivalence

Proposition 1.4. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$

* Si $\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$ alors $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$
* Si $l \in \mathbb{R}^*$ (ni $\pm\infty$, ni 0) et tel que $\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \end{cases}$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$

Proposition 1.5. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$
Alors f et g ont le même signe au voisinage de a.
Plus précisément : il existe un voisinage V de a dans I tel que, pour tout $x \in V$, $f(x)$ et $g(x)$ ont le même signe (< 0, nul, > 0).

2 Négligeabilité et domination

2.1 Définitions

Définition 2.1. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$

* On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a, et on note $f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(g(x))$ (ou $f = \underset{a}{\mathrm{o}}(g)$) s'il existe un voisinage V de a dans I et $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$
* On dit que f est dominée par g au voisinage de a et on note $f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(g(x))$ (ou $f = \underset{a}{\mathrm{O}}(g)$) s'il existe un voisinage V de a dans I et $c : V \to \mathbb{R}$ bornée tels que $\forall x \in V$, $f(x) = c(x)g(x)$

Remarque important : Dans les cas usuels, on a

* $f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(g(x))$ ssi $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$
* $f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(g(x))$ ssi $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a

2.2 Opérations

Proposition 2.2. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$

* Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ alors $f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(g(x))$
* Si $f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(g(x))$ alors $f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(g(x))$

Proposition 2.3. Soit $f, g, h : I \to \mathbb{R}$

* Si $f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(g(x))$ et $g(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(h(x))$ alors $f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(h(x))$
* Si l'une des relations de dominations est remplacée par une relation de négligeabilité, on obtient $f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(h(x))$

Proposition 2.4. Soit $f_1, f_2, g : I \to \mathbb{R}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Si $\begin{cases} f_1(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(g(x)) \\ f_2(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(g(x)) \end{cases}$ alors $\lambda f_1(x) + \mu f_2(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(g(x))$

Proposition 2.5. Soit $f_1, f_2, g_1, g_2 : I \to \mathbb{R}$

Si $\begin{cases} f_1(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(g_1(x)) \\ f_2(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(g_2(x)) \end{cases}$ alors $f_1(x) f_2(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{O}}(g_1(x) g_2(x))$

Si l'une de deux relations de domination est remplacée par une relation de négligeabilité, on a $f_1(x) f_2(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(g_1(x) g_2(x))$

Proposition 2.6. Soit $\varphi : J \to I$ une fonction telle que $\varphi(t) \xrightarrow[t \to b]{} a$ et $b \in \overline{J} \cup \{\pm\infty\}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$
Alors, si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ on a $f(\varphi(t)) \underset{t \to b}{\sim} g(\varphi(t))$
Idem avec o ou O.

2.3 Notations de Landau

On utilisera $\underset{x \to a}{\mathrm{o}}(g(x))$ et $\underset{x \to a}{\mathrm{O}}(g(x))$ dans des égalités pour designer une fonction non nommée, dont on garantit qu'elle est négligeable ou dominée par $g(x)$.
Par exemple, on écrira $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$ pour dire $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + f_1(x)$, où $f_1(x) = \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$
Attention ! Cette pratique a des conséquences surprenantes :

* Par exemple, on ne peut pas simplifier $\underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x) - \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x)$
  Cette expression veut dire $f_1(x) - f_2(x)$ où $f_1(x), f_2(x) = \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x)$
  On remplacera par un unique $\underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x)$
* On sait que $x^4 = \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$. On en déduit que si $f_1(x) = \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$ alors $f_1(x) = \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$.
  Dans un calcul :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^4) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^3) \end{aligned}$$

  On a en fait écrit $\underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^4) = \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$ mais cette égalité n'est pas symétrique :
  on ne peut pas remplacer $\underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$ par un $\underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$

Théorème 2.7. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ LASSÉ :

(i) $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$
(ii) $f(x) = g(x) + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(g(x))$
(iii) $g(x) = f(x) + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(f(x))$

3 Développements limités

3.1 Définition et premières propriétés

Définition 3.1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a : $\mathrm{DL}_n(a)$ s'il existe $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tels que
$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}((x-a)^n)$
(ou $f(a+h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \dots + c_n h^n + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h^n)$)

Proposition 3.2 (Troncature de DL). Soit $m \leq n$ deux entiers naturels.
Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$: $f(a+h) = c_0 + c_1 h + \dots + c_n h^n + \mathrm{o}(h^n)$
alors elle admet un $\mathrm{DL}_m(a)$: $f(a+h) = c_0 + c_1 h + \dots + c_m h^m + \mathrm{o}(h^m)$

Proposition 3.3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant un $\mathrm{DL}_n(a)$: $f(a+h) = c_0 + c_1 h + \dots + c_n h^n + \mathrm{o}(h^n)$
Si $c_0, c_1, \dots, c_n$ ne sont pas tous nuls, on note $\mu = \min\{i \in [\![0, n]\!] \mid c_i \neq 0\}$ et on a : $f(a+h) \underset{h \to 0}{\sim} c_\mu h^\mu$

Proposition 3.4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$

* f est continue et a ssi elle admet un $\mathrm{DL}_0(a)$ (le DL est alors $f(a+h) = f(a) + \mathrm{o}(1)$)
* f est dérivable en a ssi elle admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ (le DL est alors $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \mathrm{o}(h)$)

Proposition 3.5 (Unicité du DL). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $b_0, \dots, b_n, c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} f(a+h) &= b_0 + b_1 h + \dots + b_n h^n + \mathrm{o}(h^n) \\ &= c_0 + c_1 h + \dots + c_n h^n + \mathrm{o}(h^n) \end{aligned}$$

Alors $\forall i \in [\![0, n]\!], b_i = c_i$

Corollaire 3.6. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$: $f(h) = c_0 + c_1 h + ... + c_n h^n + \mathrm{o}(h^n)$

* Si f est paire, on a $c_1 = c_3 = ... = 0$
* Si f est impaire, alors $c_0 = c_2 = ... = 0$

3.2 Lemme de primitivation des DL

Lemme 3.7. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et $a \in I$
On suppose que f' admet un $\mathrm{DL}_n(a)$: $f'(a+h) = c_0 + c_1 h + ... + c_n h^n + \mathrm{o}(h^n)$
Alors f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$: $f(a+h) = f(a) + c_0 h + c_1 \frac{h^2}{2} + ... + c_n \frac{h^{n+1}}{n+1} + \mathrm{o}(h^{n+1})$

3.3 Théorème de Taylor-Young

Rappel : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable et $a \in I$, il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)}(a) = P^{(k)}(a)$ c'est le n-ième polynôme de Taylor de f en a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Théorème 3.8 (Taylor-Young). Soit $f \in C^n(I)$ et $a \in I$
Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}((x-a)^n)$$

càd

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h^n)$$

Notamment, f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$

Théorème 3.9 (Formulaire). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-h} &= 1 + h + h^2 + ... + h^n + \mathrm{o}(h^n) \\
\frac{1}{1+h} &= 1 - h + h^2 - h^3 + ... + (-1)^n h^n + \mathrm{o}(h^n) \\
(1+h)^\alpha &= 1 + \alpha h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}h^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}h^3 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}h^n + \mathrm{o}(h^n) \\
\ln(1+h) &= h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{h^n}{n} + \mathrm{o}(h^n) \\
\arctan(h) &= h - \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{h^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}(h^{2n+1}) \\
\exp(h) &= 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + ... + \frac{h^n}{n!} + \mathrm{o}(h^n) \\
\cosh(h) &= 1 + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + ... + \frac{h^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(h^{2n}) \\
\sinh(h) &= h + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + ... + \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(h^{2n+1}) \\
\cos(h) &= 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{h^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(h^{2n}) \\
\sin(h) &= h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

4 Calculs pratiques

4.1 Somme et produit

On retrouve le DL de cosh :

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + ... + \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{h^n}{n!} + o(h^n)$$
$$e^{-h} = 1 - h + \frac{h^2}{2!} + ... - \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{h^n}{n!} + o(h^n)$$

Donc

$$\cosh(h) = \frac{e^h + e^{-h}}{2} = 1 + \frac{h^2}{2!} + ... + \frac{h^{2n}}{(2n)!} + o(h^{2n})$$

Cela marche plus généralement pour les parties paire ($x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$) et impaire ($x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$) d'une fonction f.

$\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto e^x \sinh(x)$:

$$\begin{aligned} e^x \sinh(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Si un facteur a une valuation > 0, on peut développer l'autre à une précision moindre.

4.2 Composition

On peut facilement composer un DL avec une puissance de x : par exemple, donnons un $\mathrm{DL}_5(0)$ de $x \mapsto \sin(x^2)\cos(x)$

$$\begin{aligned} \sin(x^2)\cos(x) &= (x^2 + o(x^5))(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)) \\ &= x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^5) \end{aligned}$$

On peut aussi composer avec des fonction plus compliquées. Donnons un $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto e^{\sin(x)}$

$$\begin{aligned} e^{\sin(x)} &= 1 + \sin(x) + \frac{(\sin(x))^2}{2} + o(x^2) \\ &= 1 + (x + o(x^2)) + \frac{(x + o(x))^2}{2} + o(x^2) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

4.3 Quotient

Pas besoin de nouvelle technique : on utilise le DL de $u \mapsto \frac{1}{1+u}$

$\mathrm{DL}_4(0)$ de $\frac{1}{\cos}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1+(\cos(x)-1)} \\
&= 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4)\right) + \left(-\frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\right)^2 + \mathrm{o}(x^4) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + \mathrm{o}(x^4) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4)
\end{aligned}$$

$\mathrm{DL}_5(0)$ de tan

$$\begin{aligned}
\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4)\right) \\
&= x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{5x^5}{24} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^5) \\
&= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \mathrm{o}(x^5)
\end{aligned}$$

Remarque : Selon le programme officiel,

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$$

est à connaître.

5 Applications

5.1 Limites et équivalents

Déterminons la limite en 0 de $\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$

$$\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)}$$

Or

$$\begin{aligned}
x^2 - \sin^2(x) &= \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}(x^4) \\
x^2 - \sin^2(x) &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^4}{3}
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}$$

Donc

$$\frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{3}$$

Équivalent en 0 de $x \mapsto (\cosh(x))^x - (\cos(x))^x$

$$\begin{aligned}
(\cosh(x))^x &= \exp(x \ln(\cosh(x))) \\
&= \exp\left(x\left(\left(\frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3)\right) + \mathrm{o}(x^3)\right)\right) \\
&= 1 + \frac{x^3}{2} + \mathrm{o}(x^3)
\end{aligned}$$

De même

$$(\cos(x))^x = 1 - \frac{x^3}{2} + \mathrm{o}(x^3)$$

Donc

$$\begin{aligned}
(\cosh(x))^x - (\cos(x))^x &= x^3 + \mathrm{o}(x^3) \\
&\underset{x \to 0}{\sim} x^3
\end{aligned}$$

5.2 Étude locale d'une fonction

On rappelle que $f : I \to \mathbb{R}$ admet un $\mathrm{DL}_0(a)$ ssi f est continue en a.
$\mathrm{DL}_1(a)$ ssi f est dérivable en a.

Un DL de la forme $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \lambda h^\nu + \mathrm{o}(h^\nu)$ permet de déterminer la position de f par rapport à sa tangente :

$$f(a+h) - (f(a) + f'(a)h) \underset{h \to 0}{\sim} \lambda h^\nu$$

et deux fonctions équivalentes ont localement le même signe.
Cela montre notamment le résultat suivant :

Proposition 5.1. Soit $f \in C^2(I)$ et $a \in I$ un point intérieur.

* Si f a un minimum local en a, alors $f'(a) = 0$ et $f''(a) \geq 0$
* Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, f admet un minimum local en a.

5.3 Asymptotes

On peut calculer des développements asymptotiques plus généraux que des DL.

Donnons un DA à la précision $\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)$ de $x \mapsto \frac{1}{e^x-1}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e^x-1} &= \frac{1}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3)} \\
&= \frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\mathrm{o}(x^2)} \\
&= \frac{1}{x}\left(1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\mathrm{o}(x^2)\right)+\left(\frac{x}{2}+\mathrm{o}(x)\right)^2+\mathrm{o}(x^2)\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+\mathrm{o}(x^2)\right) \\
&= \frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\frac{x}{12}+\mathrm{o}(x)
\end{aligned}$$

Remarque : On peut calculer certains DA quand $x \to +\infty$ en passant par la fonction $h \mapsto f(\frac{1}{h})$

Considérons $x \mapsto x^2 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{h}\right) &= \frac{1}{h^2}\ln\left(\frac{\frac{1}{h}}{\frac{1}{h}-1}\right) \\
&= \frac{1}{h^2}\ln\left(\frac{1}{1-h}\right) \\
&= -\frac{1}{h^2}\ln(1-h) \\
&= -\frac{1}{h^2}\left(-h-\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{3}+\mathrm{o}(h^3)\right) \\
&= \frac{1}{h}+\frac{1}{2}+\frac{h}{3}+\underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h)
\end{aligned}$$

Donc

$$f(x) = x+\frac{1}{2}+\frac{1}{3x}+\underset{x\to\pm\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Graphiquement, cela dit que la droite d'équation $y = x+\frac{1}{2}$ est une asymptote du graphe de f et cela donne la position relative du graphe et de l'asymptote.